



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Podstawy wytrzymałości materiałów

IMiR - MiBM - Wykład Nr 3

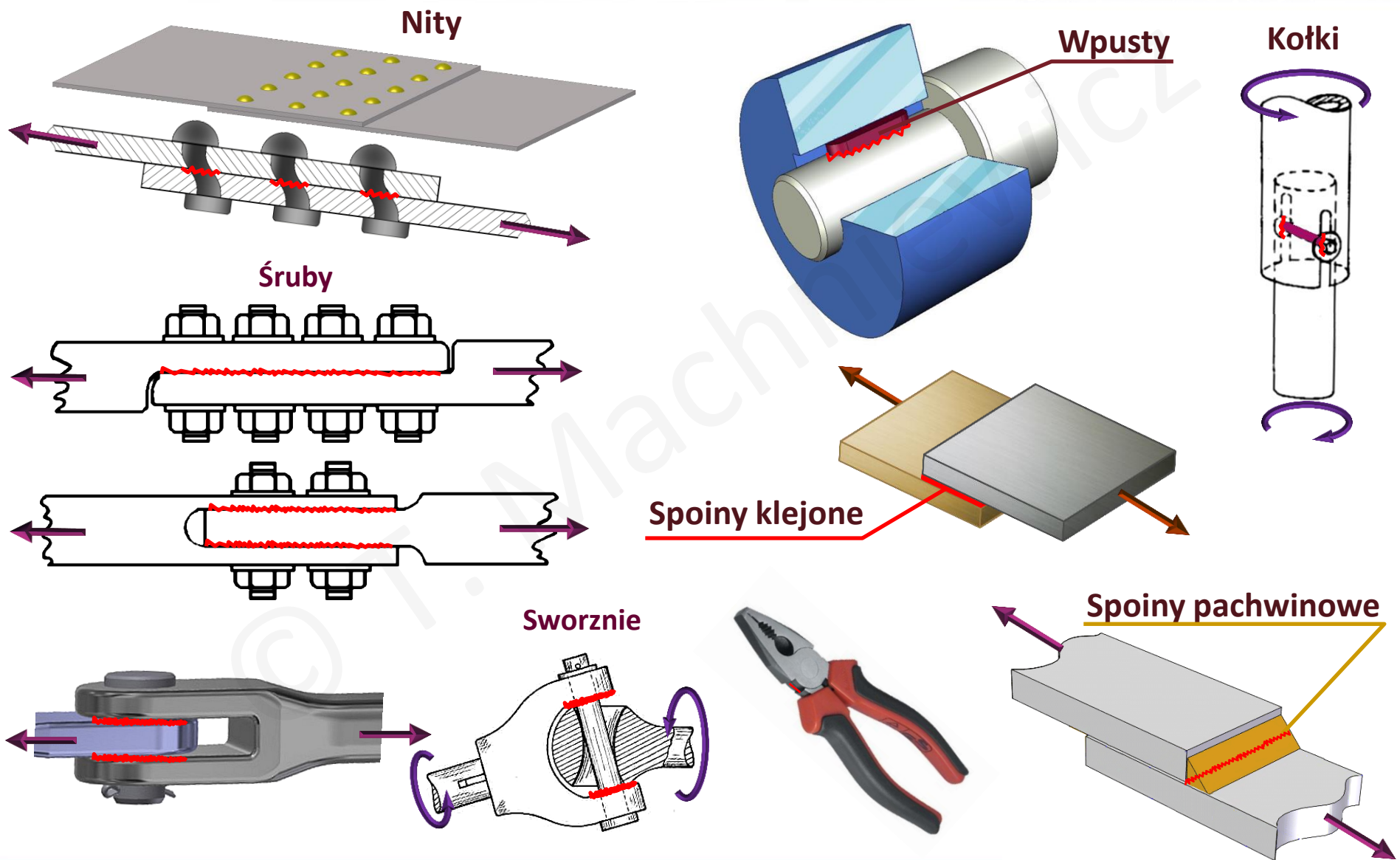
Ścinanie techniczne

Ścinanie techniczne, warunek bezpieczeństwa na ścinanie, obliczenia wytrzymałościowe połączeń śrubowych/nitowych/sworzniowych, obliczenia wytrzymałościowe wytrzymałości spoin pachwinowych

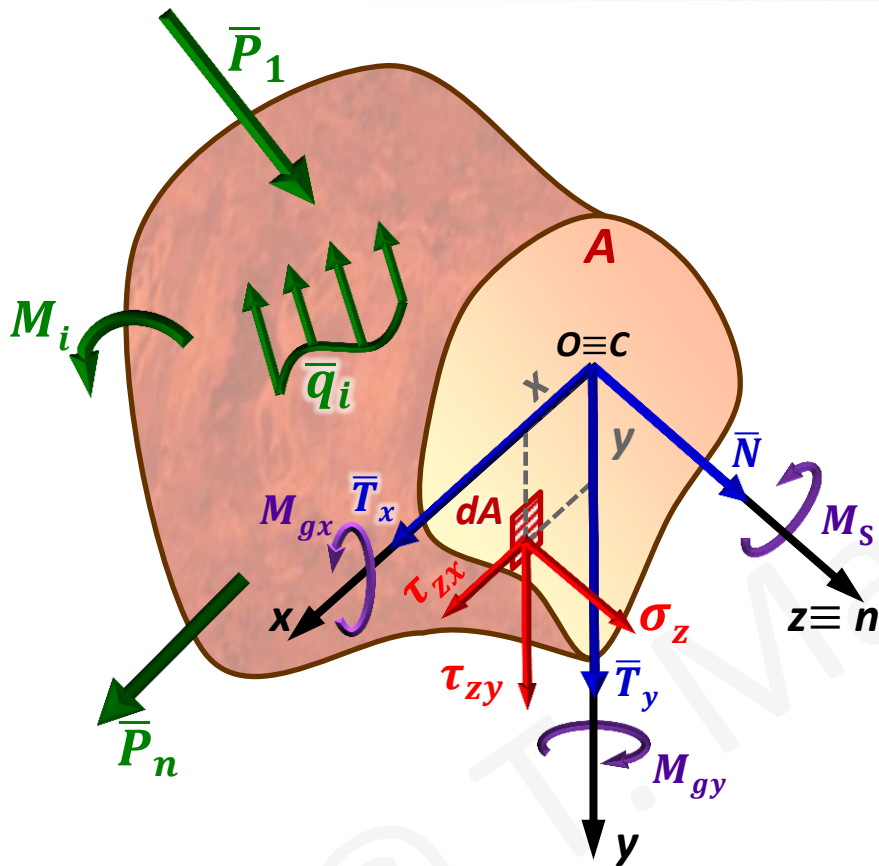
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz

3.1. Przykłady łączników poddawanych ścinaniu



3.2. Ścinanie: siły wewnętrzne i naprężenia



$$N = \int_A \sigma_z dA \quad - \text{rozciąganie/ściskanie}$$

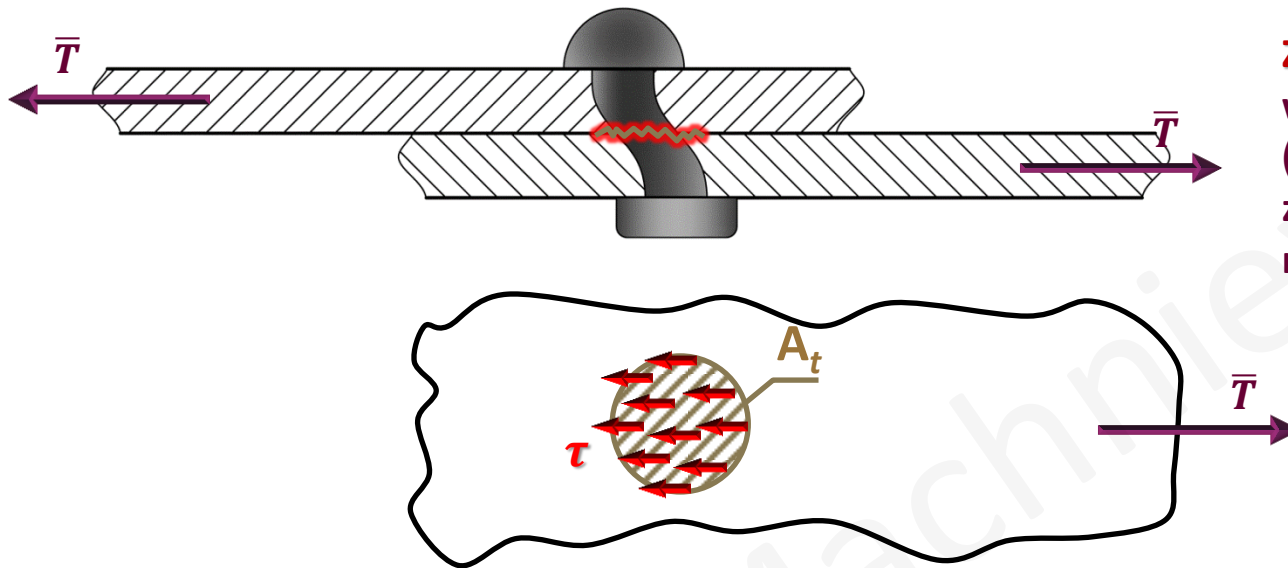
$$\left. \begin{aligned} T_x &= \int_A \tau_{zx} dA \\ T_y &= \int_A \tau_{zy} dA \end{aligned} \right\} - \text{ściananie}$$

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_z y dA \\ M_y &= \int_A \sigma_z x dA \end{aligned} \right\} - \text{zginanie}$$

$$M_s = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \quad - \text{skręcanie}$$

3.3. Ścinanie techniczne: warunek bezpieczeństwa



Założenie #1:

wartość naprężeń normalnych (związanych ze zginaniem) jest znacznie mniejsza niż wartość naprężeń tnących.

$$\int_{A_t} \tau dA = T$$

Założenie #2: $\tau = \text{const.}$

$$\tau = \frac{T}{A_t}$$

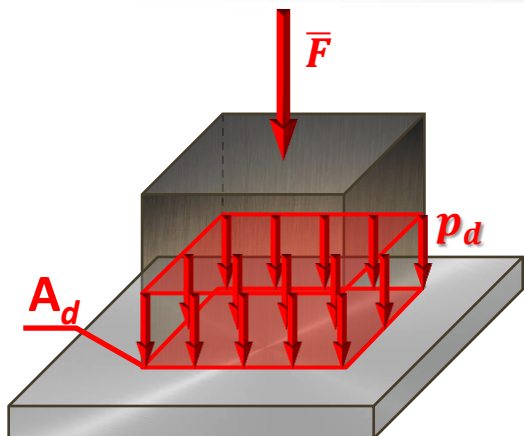
→ zależność na naprężenia tnące (styczne) w przypadku ścinania technicznego

Warunek bezpieczeństwa na ścinanie techniczne:

$$\tau = \frac{T}{A_t} \leq k_t$$

τ – naprężenia styczne,
 T – siła tnąca,
 A_t – pole przekroju ścinanego,
 k_t – dopuszczalne naprężenia ścinające.

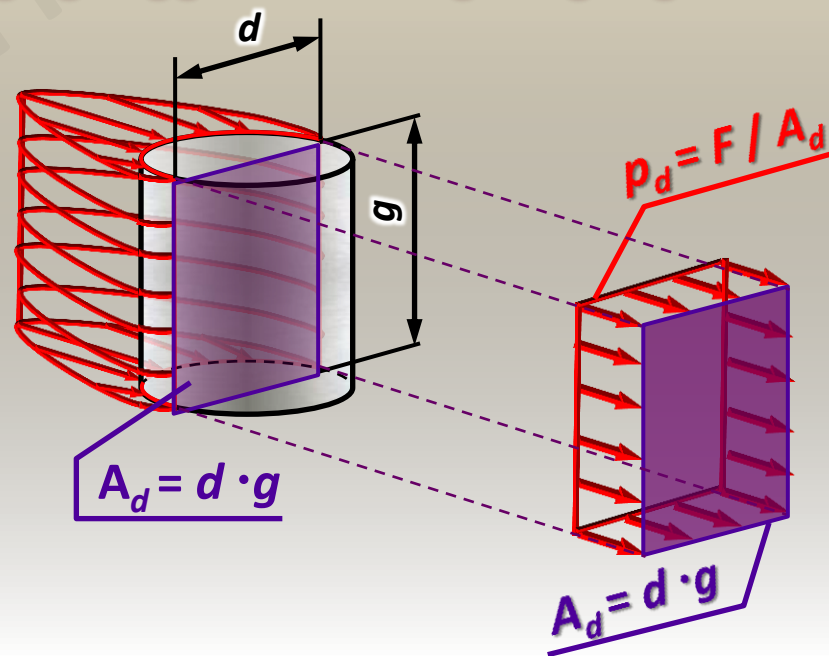
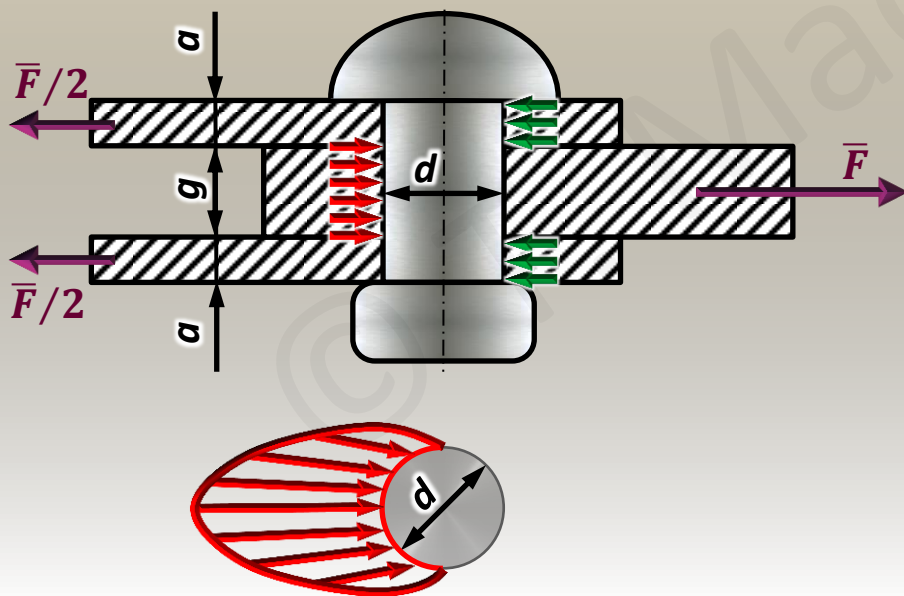
3.4. Warunek bezpieczeństwa na docisk powierzchniowy



$$p_d = \frac{F}{A_d} \leq k_d$$

p_d – wielkość docisku powierzchniowego,
 F – siła docisku,
 A_d – całkowite pole powierzchni docisku,
 k_t – dopuszczalny docisk powierzchniowy.

Pole docisku przy współpracy powierzchni cylindrycznych



3.5. Obliczenia wytrzymałościowe dla nitów, sworzni, kołków, ...

Warunek bezpieczeństwa na ścinanie:

$$\tau = \frac{F}{A_t} \leq k_t$$

$$A_t = \frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot i$$

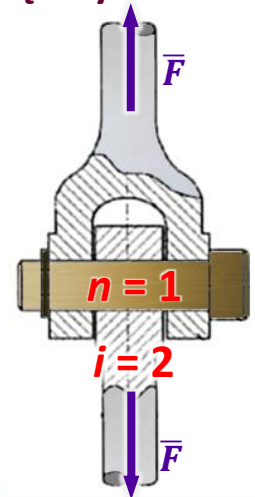
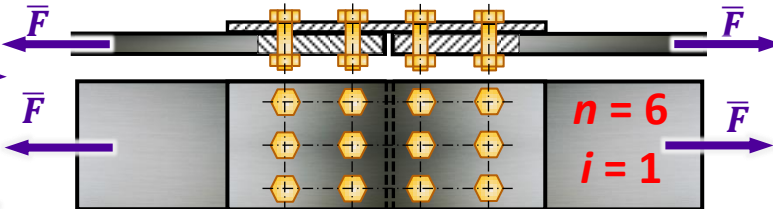
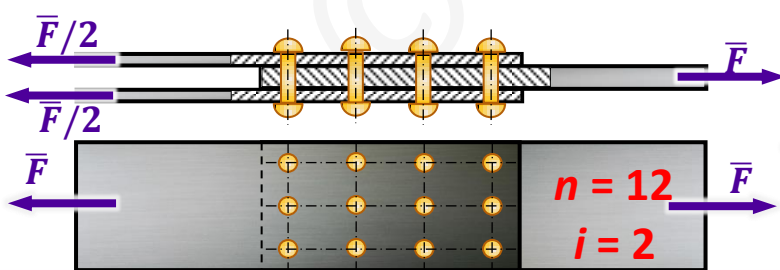
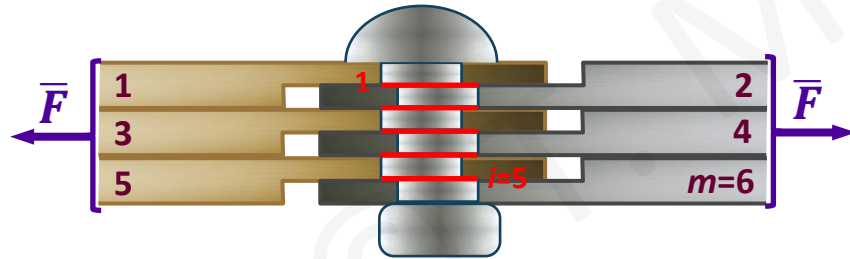
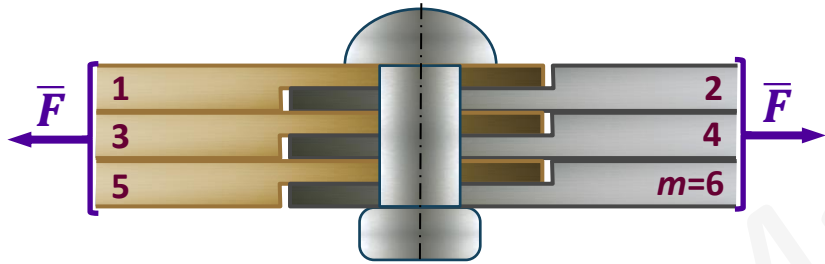
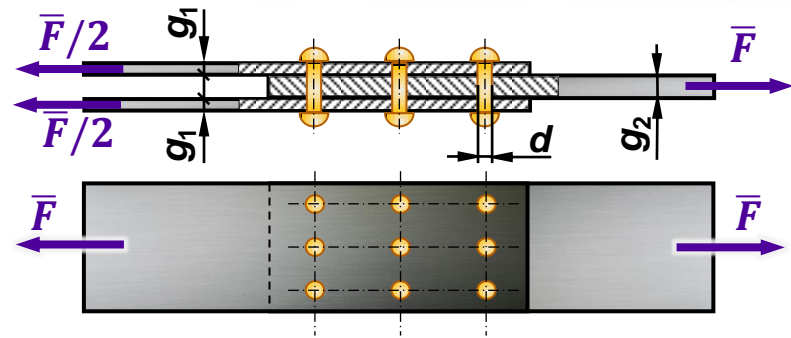
$$\tau = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2 \cdot n \cdot i} \leq k_t$$

gdzie:

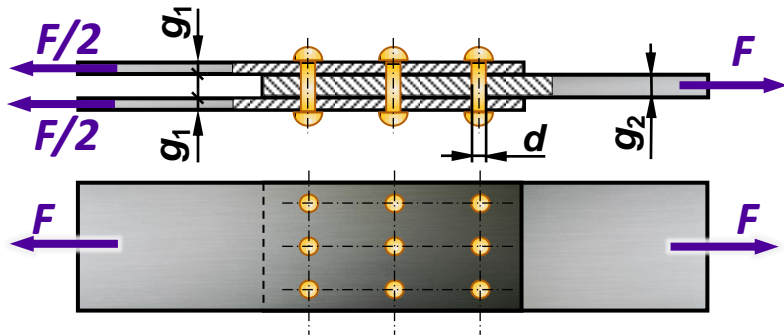
- F – siła ścinająca,
- d – średnica elementu łączącego (nit, sworzni, itp.),
- k_t – dopuszczalne naprężenia ścinające,
- n – liczba elementów łącznych przenoszących obciążenie,
- i – liczba płaszczyzn ścinania elementów łącznych:

$$i = m - 1$$

m – liczba blach objętych łącznikiem



3.5. Obliczenia wytrzymałościowe dla nitów, sworzni, kołków, ...



Warunek bezpieczeństwa na docisk powierzchniowy:

$$p_d = \frac{F}{A_d} \leq k_d$$

$$A_d = d \cdot g_{min} \cdot n$$

$$p_d = \frac{F}{d \cdot g_{min} \cdot n} \leq k_d$$

gdzie:

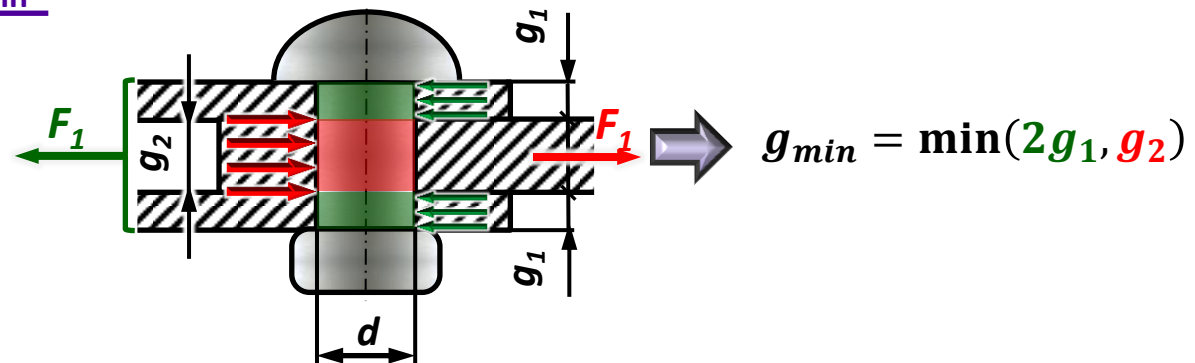
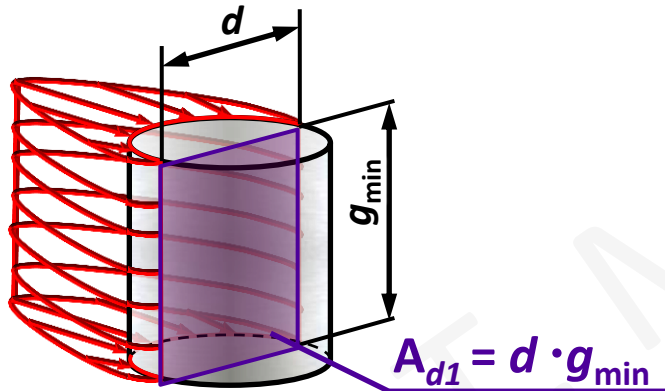
F – siła działająca na połączenie,

d – średnica elementu złącznego (nit, sworznia, itp.),

n – liczba elementów złącznych przenoszących obciążenie,

k_d – dopuszczalne dociski powierzchniowe,

g_{min} – mniejsza z sumarycznych wysokości na jakiej działa docisk po jednej stronie elementu złącznego, np. :



3.6. Obliczenia wytrzymałościowe spoin pachwinowych

Warunek bezpieczeństwa:

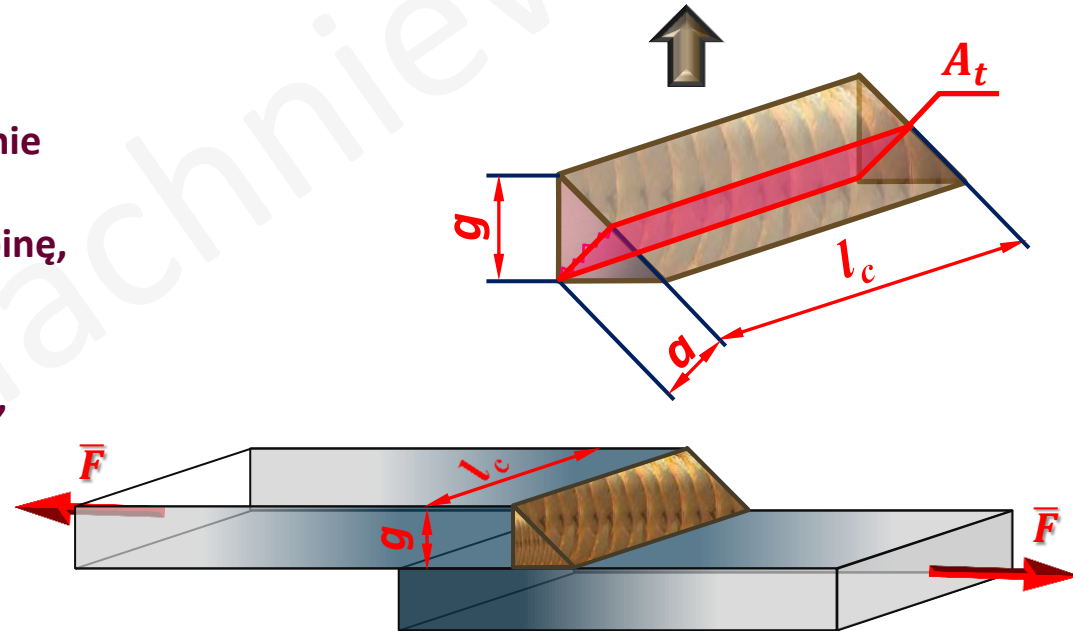
$$\tau = \frac{F}{A_t} \leq k_{ts}$$

$$\tau = \frac{F}{0.7 \cdot g \cdot l_c} \leq k_{ts}$$

$$A_t = a \cdot l_c = \frac{\sqrt{2}}{2} g \cdot l_c \cong 0.7 \cdot g \cdot l_c$$

gdzie:

- F – siła ścinająca,
- A_t – pole powierzchni ścinanej w płaszczyźnie w której jest ono najmniejsze,
- k_{ts} – dopuszczalne naprężenie ścinające spoinę,
- g – wysokość spoiny,
- a – grubość spoiny ($a \cong 0.7g$),
- l_c – całkowita obliczeniowa długość spoiny,

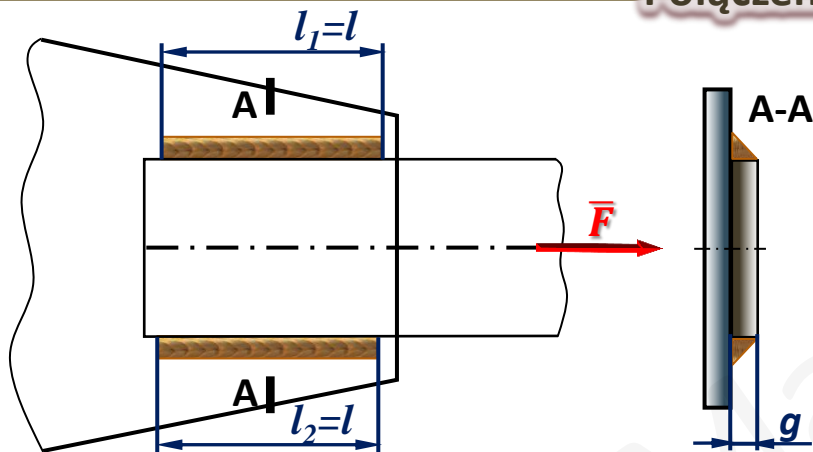


3.6. Obliczenia wytrzymałościowe spoin pachwinowych

Zasady doboru długości wzdłużnych spoin pachwinowych:

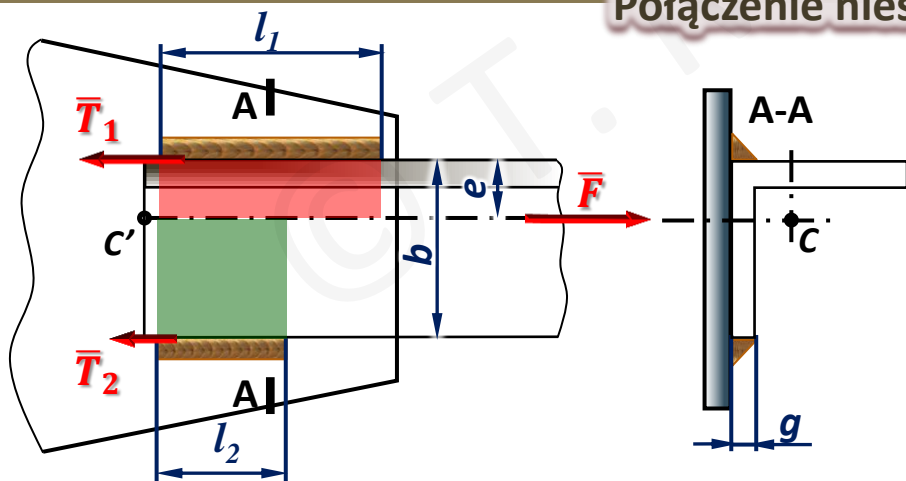
$$\tau = \frac{F}{0.7 \cdot g \cdot l_c} \leq k_{ts}$$

Połączenie symetryczne:



$$\left. \begin{aligned} l_c &= l_1 + l_2 \\ l_1 &= l_2 = l \end{aligned} \right\} \Rightarrow l_c = 2l$$

Połączenie niesymetryczne:



$$l_c = l_1 + l_2$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iC'} = 0 \Rightarrow T_1 e = T_2 (b - e)$$

gdy $g_1 = g_2 = g$: $T \sim l \Rightarrow l_1 e = l_2 (b - e)$

Przykład 3.1:

Obliczyć średnicę łączników (nitów) dla połączenia jak na rysunku:

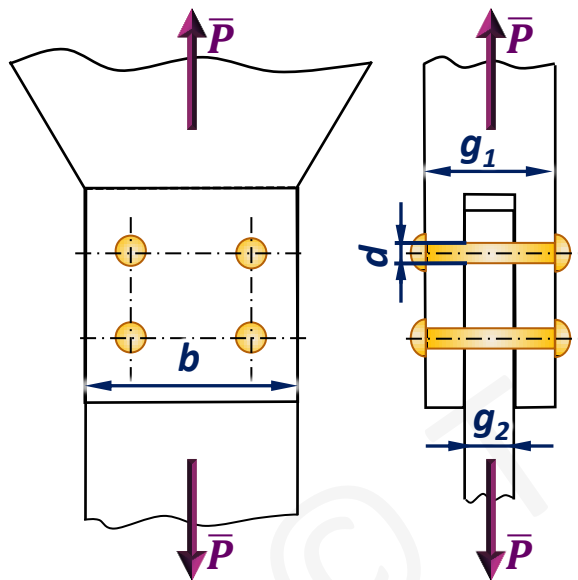
Dane:

$$P=12 \text{ kN}, g_1=12 \text{ mm}, g_2=5 \text{ mm},$$

$$k_t=70 \text{ MPa}, k_d=140 \text{ MPa}, k_r=120 \text{ MPa}$$

Szukane:

$$d=?, b=?$$



1) Warunek bezpieczeństwa na ścinanie:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{P}{A_t} \leq k_t \\ A_t &= \frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot i \end{aligned} \right\} \tau = \frac{4P}{\pi d^2 \cdot n \cdot i} \leq k_t \quad n = 4 \quad i = 2$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot k_t \cdot n \cdot i}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12000}{\pi \cdot 70 \cdot 4 \cdot 2}} = 5.22 \text{ mm}$$

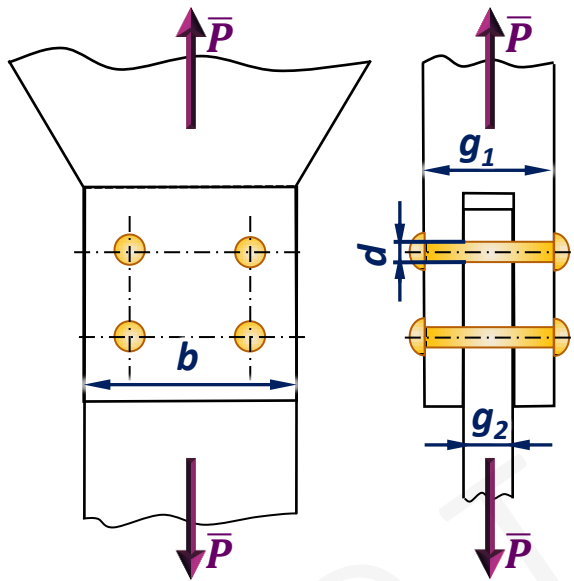
Przykład 3.1:

Dane:

$P=12 \text{ kN}$, $g_1=12 \text{ mm}$, $g_2=5 \text{ mm}$,
 $k_t=70 \text{ MPa}$, $k_d=140 \text{ MPa}$, $k_r=120 \text{ MPa}$

Szukane:

$d=?$, $b=?$



1) Warunek bezpieczeństwa na ścinanie: $d \geq 5.22 \text{ mm}$

2) Warunek bezpieczeństwa na docisk powierzchniowy:

$$p_d = \frac{P}{A_d} \leq k_d$$

$$A_{d1} = d \cdot (g_1 - g_2) \cdot n$$

$$A_{d2} = d \cdot g_2 \cdot n$$

$$g_2 < (g_1 - g_2)$$

$$A_{dmin} = A_{d2} = d \cdot g_2 \cdot n$$

$$p_d = \frac{P}{d \cdot g_2 \cdot n} \leq k_d$$

$$d \geq \frac{P}{k_d \cdot g_2 \cdot n} = \frac{12000}{140 \cdot 5 \cdot 4} = 4.28 \text{ mm}$$

Uwzględniając 1) i 2) dobieramy: $d=5.5 \text{ mm}$

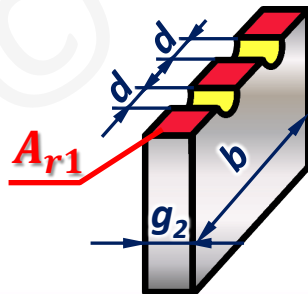
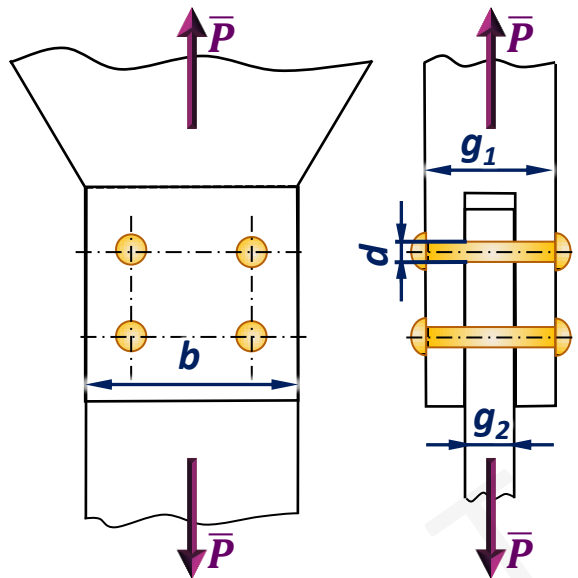
Przykład 3.1:

Dane:

$P=12 \text{ kN}$, $g_1=12 \text{ mm}$, $g_2=5 \text{ mm}$,
 $k_t=70 \text{ MPa}$, $k_d=140 \text{ MPa}$, $k_r=120 \text{ MPa}$

Szukane:

$d=?$, $b=?$



$d=5.5 \text{ mm}$

3) Warunek bezpieczeństwa na rozciąganie:

$$\sigma = \frac{P}{A_r} \leq k_r$$

$$A_{r1} = (b - 2d)g_2 \quad A_{r2} = (b - 2d)(g_1 - g_2)$$

$$g_2 < (g_1 - g_2) \Rightarrow A_{r1} < A_{r2}$$

$$A_{r\min} = A_{r1} = (b - 2d)g_2 \quad \sigma = \frac{P}{(b - 2d)g_2} \leq k_r$$

$$b \geq \frac{P}{k_r \cdot g_2} + 2d = \frac{12000}{120 \cdot 5} + 2 \cdot 5.5 = 31 \text{ mm}$$

dobieramy: $b=32 \text{ mm}$

3.7. Ścinanie techniczne – przykłady obliczeń

Przykład 3.2:

Obliczyć długości spoin połączenia jak na rysunku:

Dane:

$P=12 \text{ kN}$, $k_t=70 \text{ MPa}$, L20x20x3: $b=20 \text{ mm}$, $g=3 \text{ mm}$, $e=6 \text{ mm}$

Szukane:

$l_1=?$, $l_2=?$

Warunek bezpieczeństwa na ścinanie:

$$\left. \begin{array}{l} \tau = \frac{P}{A_t} \leq k_t \\ A_t = 0.7 \cdot g \cdot l_c \end{array} \right\} \tau = \frac{P}{0.7 \cdot g \cdot l_c} \leq k_t \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} l_1 e = l_2 (b - e) \Rightarrow l_1 = \frac{(b - e)}{e} l_2 \\ l_c = l_1 + l_2 \end{array} \right\} \Rightarrow l_c = \left(\frac{b}{e} - 1 \right) l_2 + l_2 = \frac{b}{e} l_2 \quad (2)$$

$$(1) \left. \begin{array}{l} \frac{P \cdot e}{0.7 \cdot g \cdot b \cdot l_2} \leq k_t \end{array} \right\} \Rightarrow l_2 \geq \frac{P \cdot e}{0.7 \cdot g \cdot b \cdot k_t} = \frac{12000 \cdot 6}{0.7 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 70} = 24.48 \text{ mm}$$

$$l_1 \geq \frac{(20 - 6)}{6} \cdot 24.48 = 57.14 \text{ mm}$$

Długości rzeczywiste:

$$l_{1K} = l_1 + 2a = 57.14 + 2 \cdot (0.7 \cdot 3) \cong 62 \text{ mm} \quad l_{2K} = l_2 + 2a = 24.48 + 2 \cdot (0.7 \cdot 3) \cong 29 \text{ mm}$$

3.7. Ścinanie techniczne – przykłady obliczeń

Przykład 3.3:

Dla pokazanego na rysunku połączenia blach o grubości $t=10$ mm obliczyć dopuszczalną wartość siły P , jeżeli dla użytych nitów o średnicy $d=20$ mm dopuszczalne naprężenia tnące wynoszą $k_t=80$ MPa, zaś dopuszczalne dociski powierzchniowe $k_d=160$ MPa.

Dane: $k_t=80$ MPa, $k_d=160$ MPa, $d=20$ mm, $t=10$ mm

Szukane: $P_{dop}=?$

Założenie:

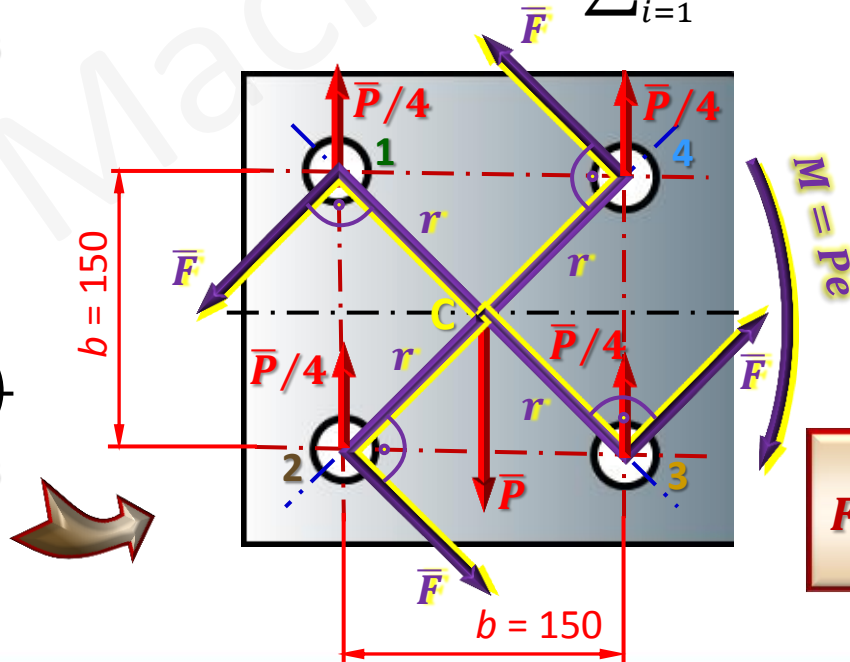
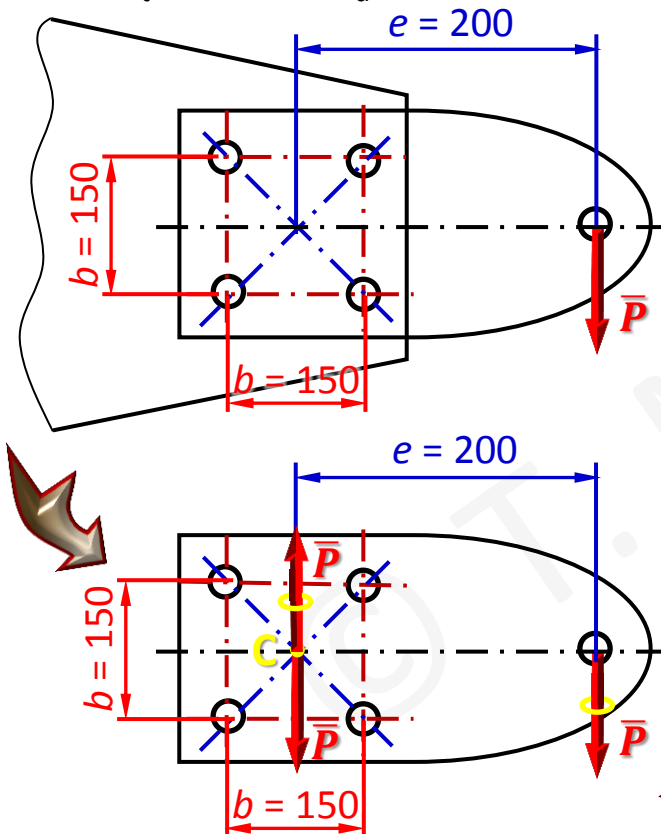
Składowa reakcji nitu wywołana momentem jest proporcjonalna do odległości osi nitu od środka ciężkości układu nitów: $F_i \sim r_i$
W rozpatrywanym przypadku: $r=const \Rightarrow F=const$

Równanie równowagi statycznej: $\sum_{i=1}^n M_{iC} = 0 \Rightarrow 4Fr - Pe = 0$

$$r = \frac{b}{2}\sqrt{2}$$

$$4F \frac{b}{2}\sqrt{2} - Pe = 0$$

$$F = \frac{Pe}{2b\sqrt{2}} = \frac{Pe\sqrt{2}}{4b}$$

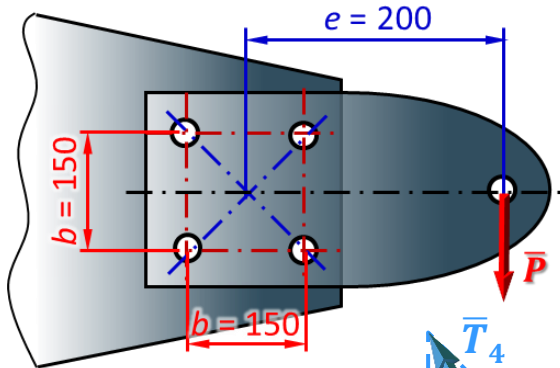


C – środek ciężkości przekrojów nitów

3.7. Ścinanie techniczne – przykłady obliczeń

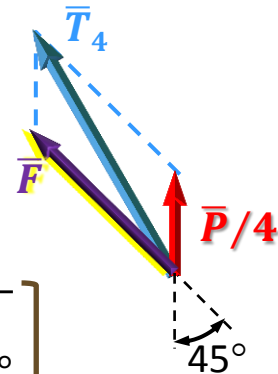
Przykład 3.3: Dane: $k_t=80$ MPa, $k_d=160$ MPa, $d=20$ mm, $t=10$ mm

Szukane: $P_{dop}=?$



$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F = \frac{Pe}{2b\sqrt{2}} = \frac{Pe\sqrt{2}}{4b}$$

$$T_{max} = T_3 = T_4$$



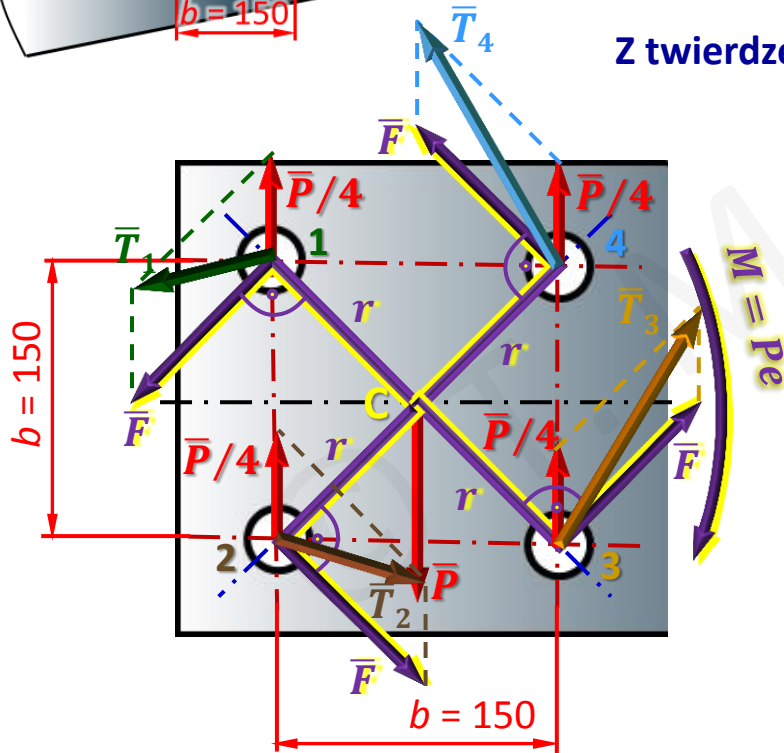
Z twierdzenia Carnota:

$$T_{max} = \sqrt{F^2 + \left(\frac{P}{4}\right)^2 + 2F\frac{P}{4}\cos 45^\circ}$$

Uwzględniając: $F = \frac{Pe\sqrt{2}}{4b}$

$$T_{max} = \sqrt{\frac{P^2 e^2}{8b^2} + \frac{P^2}{16} + 2 \frac{Pe\sqrt{2}}{4b} \frac{P}{4} \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

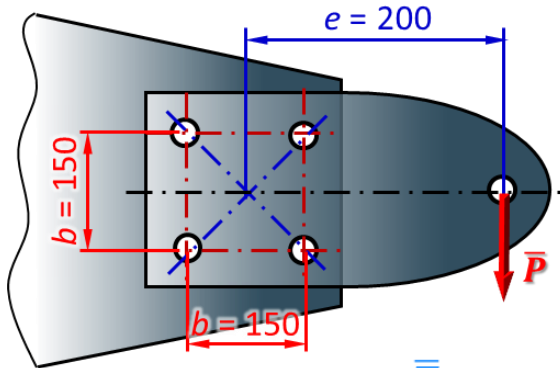
$$T_{max} = \frac{P}{4b} \sqrt{2e^2 + b^2 + 2eb}$$



3.7. Ścinanie techniczne – przykłady obliczeń

Przykład 3.3: Dane: $k_t=80$ MPa, $k_d=160$ MPa, $d=20$ mm, $t=10$ mm

Szukane: $P_{dop}=?$



$$T_{max} = \frac{P}{4b} \sqrt{2e^2 + b^2 + 2eb}$$

1° Warunek bezpieczeństwa na ścinanie:

$$\tau = \frac{T}{A_t} \leq k_t$$

$$A_t = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\tau = \frac{4T}{\pi d^2} \leq k_t$$

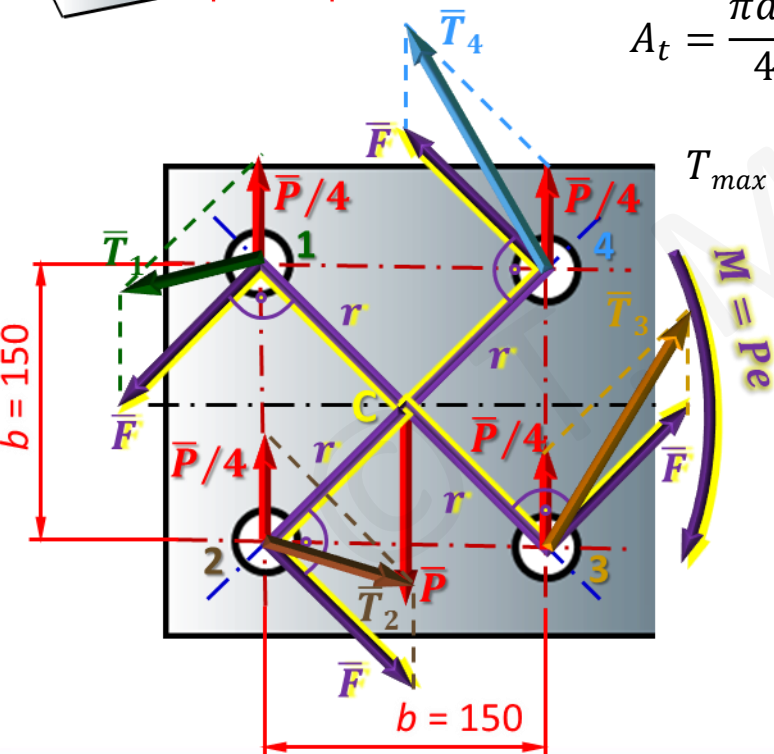
$$\frac{P \sqrt{2e^2 + b^2 + 2eb}}{b \pi d^2} \leq k_t$$

$$T_{max} = \frac{P}{4b} \sqrt{2e^2 + b^2 + 2eb}$$

$$P \leq \frac{b \pi d^2 k_t}{\sqrt{2e^2 + b^2 + 2eb}}$$

$$P \leq \frac{150 \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 80}{\sqrt{2 \cdot 200^2 + 150^2 + 2 \cdot 200 \cdot 150}}$$

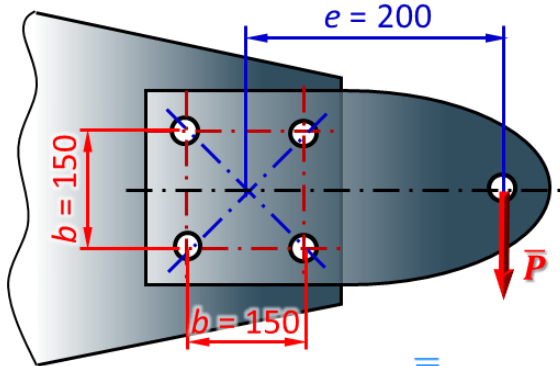
$$P \leq 37\,408 \text{ N}$$



3.7. Ścinanie techniczne – przykłady obliczeń

Przykład 3.3: Dane: $k_t=80$ MPa, $k_d=160$ MPa, $d=20$ mm, $t=10$ mm

Szukane: $P_{dop}=?$



$$T_{max} = \frac{P}{4b} \sqrt{2e^2 + b^2 + 2eb}$$

1° Warunek bezpieczeństwa na ścinanie: $P \leq 37\,408$ N

2° Warunek bezpieczeństwa na docisk powierzchniowy:

$$p_d = \frac{F}{A_d} \leq k_d$$

$$A_d = d \cdot t$$

$$p_d = \frac{F}{d \cdot t} \leq k_d$$

$$\frac{P \sqrt{2e^2 + b^2 + 2eb}}{4bdt} \leq k_d$$

$$T_{max} = \frac{P}{4b} \sqrt{2e^2 + b^2 + 2eb}$$

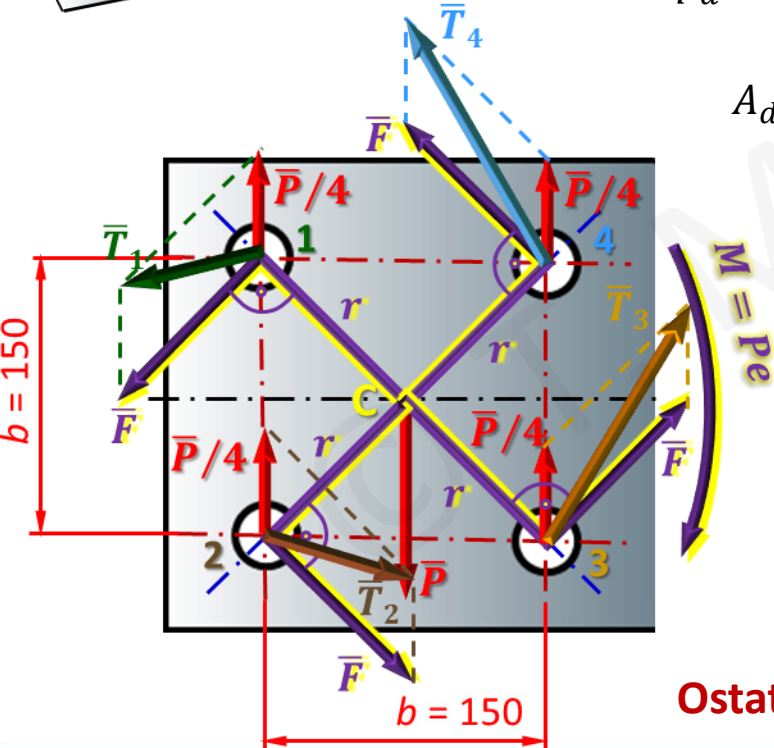
$$P \leq \frac{4 \cdot b \cdot d \cdot t \cdot k_d}{\sqrt{2e^2 + b^2 + 2eb}}$$

$$P \leq \frac{4 \cdot 150 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 160}{\sqrt{2 \cdot 200^2 + 150^2 + 2 \cdot 200 \cdot 150}}$$

$$P \leq 47\,629$$
 N

Ostatecznie (z 1° i 2°):

$$P_{dop} = 37.4$$
 kN



3.7. Ścinanie techniczne – przykłady obliczeń

Przykład 3.4:

Obliczyć maksymalną siłę tnącą działającą na najbardziej obciążoną śrubę w połączeniu jak na rysunku.

Dane: a, P

Szukane: $T_{\max}=?$

Założenie: $F_i \sim r_i$ stąd: $F_1 = F_2 = F_5 = F_6 = F$

$$F_3 = F_4 = F \frac{r_3}{r_1} \Rightarrow F_3 = F_4 = F \frac{1}{\sqrt{5}}$$

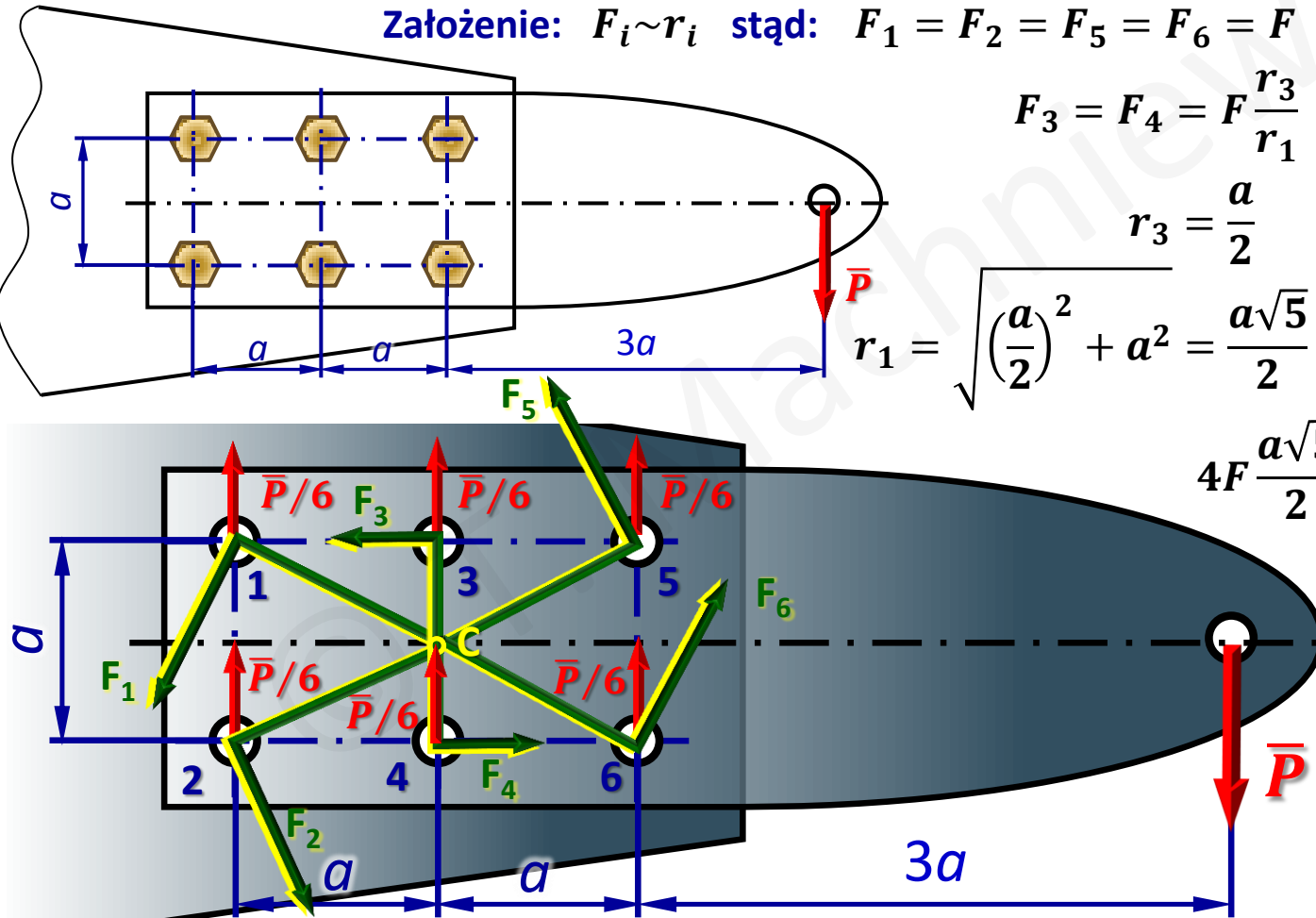
$$r_3 = \frac{a}{2}$$

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iC} = 0$$

$$4F \frac{a\sqrt{5}}{2} + 2F \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{a}{2} - 4Pa = 0$$

$$F = \frac{20P}{11\sqrt{5}}$$



3.7. Ścinanie techniczne – przykłady obliczeń

Przykład 3.4: Dane: a, P

Szukane: $T_{max}=?$

$$F_1 = F_2 = F_5 = F_6 = F = \frac{20P}{11\sqrt{5}} \quad F_3 = F_4 = F \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{20P}{55}$$

$$T_{max} = T_5 = T_6 \quad \text{bo } F_5 = F_6 = \max \text{ i } \alpha_5 = \alpha_6 = \min$$

Z twierdzenia Carnota:

$$T_{max} = T_5 = \sqrt{F_5^2 + \left(\frac{P}{6}\right)^2 + 2F_5 \frac{P}{6} \cos \alpha_5}$$

$$\cos \alpha_5 = \frac{a}{r_5} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$T_{max} = \sqrt{\left(\frac{20P}{11\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{P}{6}\right)^2 + 2 \frac{20P}{11\sqrt{5}} \frac{P}{6} \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$T_{max} \cong 0.96507P$$

